

Вечный двигатель. Математика. 11 класс

1. Обозначим две какие-нибудь цифры буквами A и X . Докажите, что шестизначное число $XAXAXA$ делится на 7 без остатка.
2. За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка, и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)?
3. Каждый из квадратных трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x)+Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет кратный корень. Обязательно ли все эти корни совпадают?
4. Решить в целых числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$.
5. В треугольнике ABC угол C равен 135° . На стороне AB вне треугольника построен квадрат с центром O . Найдите OC , если $AB=6$.
6. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.
7. В двух различных плоскостях лежат два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Прямая AB пересекается с прямой A_1B_1 , прямая BC — с прямой B_1C_1 , прямая CA — с прямой C_1A_1 . Доказать, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 или все три пересекаются в одной точке, или параллельны друг другу.
8. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?